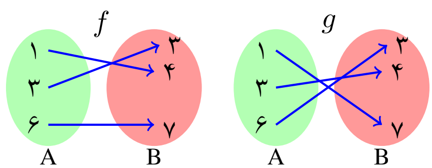
فصل ۵
تابع

تابع و مفهوم آن مهمترین بخش ریاضی است. آنچه عموماً در ریاضی بعنوان تابع شناخته می‌شود مفهومی است که طی چند صد سال شکل گرفته و تکامل پیدا کرده است. از آنجا که در بحث مجموعه ها، تنها اجتماع و اشتراک و متمم مفاهیمی کلی اند، روابط بین اعضاء مجموعه‌ها بنحو مطلوب در مفهوم تابع جلوه پیدا می کند. حال به تعریف تابع می پردازیم.

۱.۵ تعریف تابع

مجموعه‌های A و B را در نظر بگیرید. تابع f قاعده‌ای است که به هر عضو $a \in A$، یک عضو $b \in B$ را نسبت می دهد. بعبارتی دیگر یک ارتباطی است که عضوهای A را به عضوهای B می برد و می نویسیم $f : A \to B$. مجموعهٔ A را مجموعهٔ آغاز و مجموعهٔ B را مجموعهٔ پایان گوئیم. این ارتباط بین $a \in A$ و $b \in B$ را بصورت زوج مرتب (a, b) نشان می دهیم. مثلاً با فرض $A = \{۱, ۳, ۶\}$ و $B = \{۴, ۳, ۷\}$، دوتابع f و g از A به B را چنین تعریف می کنیم:

$$f : A \to B \quad g : A \to B$$
$$f = \{(۱, ۴), (۳, ۳), (۶, ۷)\} \quad g = \{(۱, ۷), (۳, ۴), (۶, ۳)\}$$



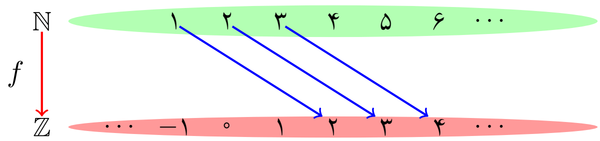
شکل ۱.۵: توابع f و g، روابطی بین دو مجموعه A و B

باید توجه کنید که هر دوی f و g توابعی از A به B بوده و این توابع هر مقدار از A را **تنها** به یک مقدار از B می برند. این انتقال اعضاء از A به B برای ما بسیار با اهمیت است. قاعده‌ای که طبق آن f اعضائی از A را به اعضائی از B می برد را ضابطهٔ تابع گوئیم. فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی و $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح باشند (شکل ۲.۵). در نظر بگیرید:

$$f = \{(۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۴), (۴, ۵), (۵, ۶), (۶, ۷), \cdots\}$$

چنین ضابطه‌ای که اعضاء $\mathbb{N}$ را به اعضاء $\mathbb{Z}$ می برد، بصورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \ , \\ f(n) = n + ۱. \end{cases}$$



شکل ۲.۵: رفتار یک تابع که اعضای $\mathbb{N}$ را به برخی از اعضای $\mathbb{Z}$ می برد.

همچنین با داشتن ضابطهٔ تابع می توان اعضاء آنرا بدست آورد. بطور مثال اگر

$$h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \ , \ \ h(n) = ۲n + ۱$$

باشد، با انتخاب n می توان تابع را بصورت زوجهای مرتب به شکل زیر نمایش داد:

$$h = \{(۱, ۳), (۲, ۵), (۳, ۷), (۴, ۹), (۵, ۱۱), \cdots\}$$

ضابطهٔ توابع را معمولاً با حروف $f, g, h, \ldots$ مشخص می کنند ولی گاهی نیز بسته به موضوع مورد بحث با حروف مرتبط مشخص می نمائیم، مثل T برای تابع دما در ترمودینامیک. دقت کنید که ضابطهٔ تابع عضو مجموعهٔ آغاز را تنها به یک عضو مجموعهٔ پایان می برد و این مشخصهٔ اصلی یک تابع است. تابعی که در آن $B = \mathbb{R}$ باشد را تابع حقیقی گوئیم.

مثال ۱.۱.۵. برای تابعی با ضابطهٔ $f(x) = ۲x^۲ - ۴$ حاصل مقادیر زیر را بدست آورید.

$$f(۲) \ \ , \ \ f(-۲) \ \ , \ \ f(۳) \ \ , \ \ f(۵) \ \ , \ \ f(-۱)$$

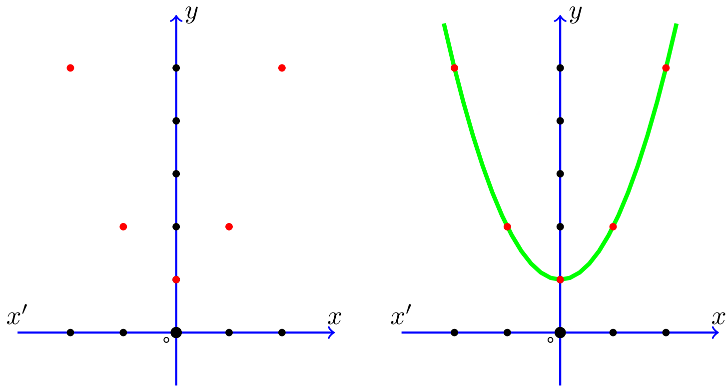
حل. برای یافتن مقادیری که تابع $f(x)$ مشخص می کند می بایست بجای متغیر x اعداد درون پرانتز را قرار دهیم، پس

$$\begin{aligned} f(۲) &= ۲(۲)^۲ - ۴ = ۲(۴) - ۴ = ۸ - ۴ = ۴ \\ f(-۲) &= ۲(-۲)^۲ - ۴ = ۲(۴) - ۴ = ۸ - ۴ = ۴ \\ f(۳) &= ۲(۳)^۲ - ۴ = ۲(۹) - ۴ = ۱۸ - ۴ = ۱۴ \\ f(۵) &= ۲(۵)^۲ - ۴ = ۲(۲۵) - ۴ = ۵۰ - ۴ = ۴۶ \\ f(-۱) &= ۲(-۱)^۲ - ۴ = ۲(۱) - ۴ = ۲ - ۴ = -۲ \end{aligned}$$

■

۱.۱.۵ نمودار تابع

هر تابع را می توان روی صفحهٔ مختصات دکارتی به شکل زوجهای مرتب نمایش داد. برای مثال اگر بخواهیم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{۲} + ۱$ را در صفحهٔ مختصات دکارتی رسم کنیم، کافیست نقاط دلخواهی را برای x انتخاب کرده و با بدست آوردن مقادیر y نقاط را بصورت زوج مرتب بنویسیم. بنابراین نمودار $y = f(x)$ بصورت زیر رسم می شود. این روش رسم را رسم با نقطه یابی نامیده و هرچه تعداد نقاط بیشتری مشخص شود شکل دقیقتر ترسیم خواهد شد.



x	y
-۲	۵
-۱	۲
۰	۱
۱	۲
۲	۵

شکل ۳.۵: رسم نمودار تابع $f(x) = x^{۲} + ۱$ با نقطه یابی.

مطلب ۵.۱: مکان هندسی

نمودار یک تابع عبارتست از مجموعه نقاطی از صفحه که مختصاتشان در ضابطهٔ تابع صدق می کند. نمودار تابع را مکان هندسی نقاط تابع نیز می نامند.
همچنین
هر خط عمودی نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.

برای تابعی با ضابطهٔ $y = f(x)$، بجای x می توان هر عددی را قرار داد پس x را متغیر مستقل نامیم. y که وابسته به x بوده و از ضابطهٔ تابع حاصل می شود را متغیر وابسته می نامیم. بطورکلی مجموعهٔ تمام مقادیری را که می توان بجای x قرار داد، دامنهٔ تابع نامیده و آنرا با D_f نشان می دهند. برای تابع مثال ۱.۱.۵، $D_f = \mathbb{R}$ است. از طرفی دیگر مقادیری که از تابع $f(x)$ بدست می آید روی محور y—ها تنها قسمت خاصی را می پوشاند. مجموعهٔ تمام مقادیری که از مقادیر y بدست می آید را برد تابع نامیده و با R_f نشان می دهیم. برای تابع شکل ۳.۵، $R_f = [۱, \infty)$ است. روش بدست آوردن دامنه و برد برخی از توابع را در ذیل ذکر خواهیم نمود.

تمرین ۲.۵. .

۱. آیا می توانید برای توابع زیر ضابطه‌ای بیان کنید؟

$$\begin{aligned} f &= \{(۱,-۱),(۲,-۲),(۳,-۳),(۴,-۴),(۵,-۵),\cdots\} \\ g &= \{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۱۰),(۴,۱۷),(۵,۲۶),\cdots\} \\ h &= \{(۱,۶),(۲,۸),(۳,۱۰),(۴,۱۲),(۵,۱۴),\cdots\} \end{aligned}$$

۲. برای تابع $g(x)=x^{۳}-x+۲$ حاصل مقادیر زیر را بدست آورید.

$$g(۲)\ ,\ g(-۲)\ ,\ g(۳)\ ,\ g(۵)\ ,\ g(-۱)$$

۳. توابع $f(x)=x^{۲}+۳$ و $g(x)=-۲x^{۲}+۴$ را در صفحهٔ مختصات رسم کنید.

۱.۲.۵ دامنهٔ‌توابع

برای بدست آوردن دامنهٔ یک تابع عموماً روش مشخصی وجود دارد، بدین طریق که در توابع کسری مخرج باید مخالف صفر باشد، چون تقسیم بر صفر مجاز نیست. در توابع رادیکالی، (با فرجه زوج) زیر رادیکال می بایست مثبت باشد، زیرا عدد منفی زیر رادیکال برای ما مفهومی ندارد. به چند مثال توجه نمائید.

مثال ۱.۲.۵. دامنهٔ $f(x)=\dfrac{x-۱}{x-۵}$ را بدست آورید.

حل. چون در حالت کسری مخرج می بایست صفر نباشد لذا $x-۵\neq ۰$ یا $x\neq ۵$ بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{۵\}$ یعنی تمام اعداد حقیقی بجز ۵. ■

مثال ۲.۲.۵. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{x-۱}$ را بیابید.

حل. در حالت رادیکالی زیر رادیکال مثبت است لذا $x-۱\geqslant ۰$ یا $x\geqslant ۱$ و این بدین معنی است که تنها اعداد بیشتر از یک قابل قبولند پس $D_g=[۱,+\infty)$. ■

مثال ۳.۲.۵. مطلوبست دامنهٔ تابع $g(x)=\dfrac{۳+\sqrt{x+۱}}{x-۲}$

حل. در حالت رادیکالی زیر رادیکال مثبت است لذا $x+۱\geqslant ۰$ یا $x\geqslant -۱$ بنابراین $D_۱=[-۱,+\infty)$. از طرفی طبق حالت کسری مخرج می بایست صفر نباشد لذا $x-۲\neq ۰$ یا $D_۲=\mathbb{R}-\{۲\}$. از آنجائیکه هر x باید در صورت و مخرج صدق کند پس $D_g=D_۱\cap D_۲$ و بنابراین $D_g=[-۱,+\infty)-\{۲\}$. ■

مثال ۴.۲.۵. دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-۱}{x-۵}}$ را بدست آورید.

حل. چون زیر رادیکال می بایست مثبت باشد پس $\dfrac{x-۱}{x-۵}\geqslant ۰$ ریشه‌های صورت و مخرج را بدست آورده و آنرا تعیین علامت می کنیم، و در نتیجه $D_f=(-\infty,۱]\cup(۵,+\infty)$. ■

۲.۲.۵ بردتوابع

بطور کلی برای بدست آوردن برد روش مشخصی وجود ندارد ولی ما با ذکر چند مثال حالات خاصی را بررسی می کنیم.

مثال ۵.۲.۵. برد تابع $f(x)=x^{۲}+۳$ را بیابید.

حل. از آنجا که $x^{۲}\geqslant ۰$ است پس با اضافه کردن مقدار ۳ به طرفین داریم $x^{۲}+۳\geqslant ۳$. اما طرف چپ برابر با y است لذا $y\geqslant ۳$ یعنی $R_f=[۳,\infty)$. ■

مثال ۶.۲.۵. برد تابع $g(x)=-۲x^{۲}+۴$

حل. چون $x^{۲}\geqslant ۰$ است، با ضرب طرفین در عدد ۲- و عوض شدن طرفین نامساوی، نتیجه می شود که $-۲x^{۲}\leqslant ۰$ با اضافه کردن مقدار ۴ به طرفین داریم $-۲x^{۲}+۴\leqslant ۴$ اما طرف چپ برابر با y است پس $y\leqslant ۴$ یعنی $R_g=(-\infty,۴]$. ■

مثال ۷.۲.۵. برد تابع $g(x)=\sqrt{x-۱}$ را بدست آورید.

حل. چون رادیکال همیشه مثبت است پس $y=\sqrt{x-۱}\geqslant ۰$ یعنی $R_g=[۰,+\infty)$. ■

مثال ۸.۲.۵. برد تابع $y=۲x^{۲}-۴x+۹$ را بدست آورید.

حل. می نویسیم $۲x^{۲}-۴x+۹-y=۰$ و برای معنی دار بودن x باید $\Delta\geqslant ۰$ پس

$$\Delta\geqslant ۰\Longrightarrow(-۴)^{۲}-۴(۲)(۹-y)\geqslant ۰\Longrightarrow ۱۶-۸(۹-y)\geqslant ۰\Longrightarrow y\geqslant ۷$$

و برد برابر $R_y=[۷,+\infty)$ بدست می آید. ■

مثال ۹.۲.۵. مطلوبست برد تابع $h(x)=\dfrac{۲x+۱}{x-۴}$

حل. از آنجا که $h(x)=\dfrac{۲x+۱}{x-۴}$ تابعی کسری است، برای بدست آوردن برد این تابع می نویسیم $y=\dfrac{۲x+۱}{x-۴}$ با طرفین-وسطین داریم

$$\begin{aligned}
y(x-۴)&=۲x+۱\\
yx-۴y&=۲x+۱\\
yx-۲x&=۱+۴y\\
x(y-۲)&=۱+۴y\\
x&=\frac{۱+۴y}{y-۲}
\end{aligned}$$

در این عبارت y نمی تواند مقدار ۲ در مخرج را بپذیرد و $y\neq ۲$ لذا $R_h=\mathbb{R}-\{۲\}$. ■

۳.۲.۵ اعمال روی توابع

توابع $f:A\to B$ و $g:B\to A$ را با دامنه های D_f و D_g در نظر می گیریم. مجموع، تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت دو تابع و همچنین دامنه‌های آنها را چنین تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned}
(f\pm g)(x)&=f(x)\pm g(x) \quad &,\quad & D_{f\pm g}=D_f\cap D_g\\
(f\cdot g)(x)&=f(x)g(x) \quad &,\quad & D_{f.g}=D_f\cap D_g\\
\left(\frac{f}{g}\right)(x)&=\frac{f(x)}{g(x)} \quad &,\quad & D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x\in D_g:g(x)=۰\}
\end{aligned}$$

مثال ۱۰.۲.۵. دامنهٔ تابع $y=\dfrac{\sqrt{x+۴}}{\sqrt{x}-۳}$ را بدست آورید.

حل. از آنجا که تابع مورد نظر خارج قسمت دو تابع $f(x)=\sqrt{x+۴}$ و $g(x)=\sqrt{x}-۳$ است، بطور جداگانه دامنه ها را بدست می آوریم $D_f=[-۴,+\infty)$ و $D_g=[۰,+\infty)$ و طبق تعریف بالا داریم:

$$\begin{aligned}
D_{\frac{f}{g}}&=D_f\cap D_g-\{x:g(x)=۰\}\\
&=[-۴,+\infty)\cap[۰,+\infty)-\{x:\sqrt{x}-۳=۰\}\\
&=[۰,+\infty)-\{۹\}
\end{aligned}$$

■

مطلب ۵.۲: تساوی توابع

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ برابرند اگر ضابطه هایشان (از نظر جبری) مساوی بوده و دامنه هایشان نیز یکی باشند.

مثال ۱۱.۲.۵. دامنهٔ تابع $h(x)=\dfrac{x+۲}{x+۲}$ را بدست آورید.

حل. هر چند این تابع از نظر مقدار برابر یک است اما باید دقت کرد که دامنهٔ تابع متفاوت از مجموعه اعداد حقیقی است زیرا طبق تعریف بالا

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x:g(x)=۰\}=\mathbb{R}\cap\Big(\mathbb{R}-\{x:x+۲=۰\}\Big)=\mathbb{R}-\{-۲\}$$

پس $h(x)=۱$ که $D_h=\mathbb{R}-\{-۲\}$. ■

۴.۲.۵ تابع چندضابطه‌ای

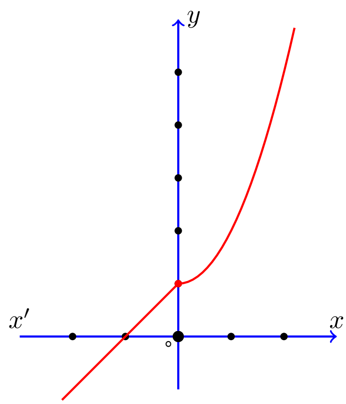
توابع چند ضابطه‌ای که بصورت قطعه ای تعریف می شوند، دارای شکل کلی بصورت

$$f(x) = \begin{cases} \text{ضابطه۱} & ; \quad \text{محدوده ۱} \\ \text{ضابطه۲} & ; \quad \text{محدوده ۲} \\ & \vdots \\ \text{ضابطه } n & ; \quad \text{محدوده } n \end{cases}$$

هستند. در این حالت دامنهٔ تابع عبارتست از اجتماع محدوده ها. برای مثال تابع دو ضابطه‌ای

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ & ; \quad x \geqslant ۰, \\ x + ۱ & ; \quad x < ۰. \end{cases}$$

را در نظر می گیریم. شکل ۴.۵ نمودار این تابع بوده و دامنه و برد آن $\mathbb{R}$ است. جهت رسم تابع چند ضابطه‌ای باید هر



شکل ۴.۵: رسم نمودار یک تابع دو ضابطه‌ای.

ضابطه را جداگانه رسم و سپس آنها را محدود به دامنه تعریف شده نمائیم.

برای بدست آوردن حاصلجمع، حاصلضرب، تفاضل یا خارج قسمت توابع چندضابطه‌ای، می بایست دامنهٔ آنها را تجزیه کنیم تا بصورت مشابه در بیایند و سپس روی دامنه های مشترک این اعمال را انجام دهیم.

مثال ۱۲.۲.۵. جمع دو تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & ; \quad x \leqslant ۲, \\ x + ۱ & ; \quad x > ۲. \end{cases}$$

و

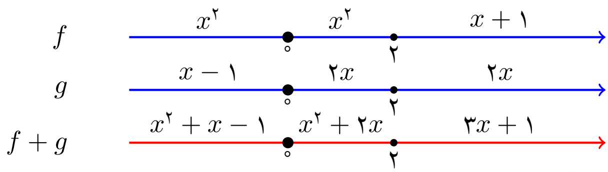
$$g(x) = \begin{cases} x - ۱ & ; \quad x < ۰, \\ ۲x & ; \quad x \geqslant ۰. \end{cases}$$

را بیابید.

حل. مانند شکل ۵.۵ دامنهٔ آنها را بطور مجزا نوشته و مجموع را روی نواحی مشترک می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= \begin{cases} x^2 & ; \quad x \leqslant 2, \\ x+1 & ; \quad x > 2. \end{cases} + \begin{cases} x-1 & ; \quad x < 0, \\ 2x & ; \quad x \geqslant 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2+x-1 & ; \quad x < 0, \\ x^2+2x & ; \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3x+1 & ; \quad x > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

■



شکل ۵.۵: مجموع دو تابع روی محدوده مشترکشان

تمرین ۳.۵. .

۱. دامنهٔ توابع زیر را بدست آورید.

$$\begin{array}{lll} f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2} & , \quad g(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x} & , \quad h(x)=\sqrt{x-1}+2\sqrt{2-x} \\ i(x)=\dfrac{\sqrt{6-x}}{x-2} & , \quad j(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2+x}} & , \quad k(x)=\sqrt{\dfrac{x-4}{3-x}} \\ \ell(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}} & , \quad m(x)=\sqrt{4-x^2} & , \quad n(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-1}} \end{array}$$

۲. برد توابع زیر را مشخص نمائید.

$$\begin{array}{lll} f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2} & , \quad g(x)=4x^2+8x+4 & , \quad h(x)=x^4-2x^2+5 \\ i(x)=4x^2+3 & , \quad j(x)=2-3(x+6)^2 & , \quad k(x)=\dfrac{x+2}{3x-1} \end{array}$$

۳. مجموع توابع چند ضابطه‌ای زیر را بنویسید. آنها را در صفحهٔ مختصات رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x - ۲ & ; \quad x \leqslant ۱, \\ ۳x + ۴ & ; \quad x > ۱. \end{cases} + \begin{cases} ۴x - ۱ & ; \quad x \leqslant -۱, \\ ۲x - ۵ & ; \quad x > -۱. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ & ; \quad x < -۲, \\ ۲x^۲ - x & ; \quad -۲ \leqslant x \leqslant ۳, \\ x + ۲ & ; \quad x > ۳. \end{cases} + \begin{cases} ۳x - ۱ & ; \quad x < ۰, \\ ۲x + ۲ & ; \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۲, \\ x^۲ - ۱ & ; \quad x > ۲. \end{cases}$$

۴. خط $y = x + ۱$ و منحنی $y = ۷ - x^۲$ را در یک صفحهٔ مختصات رسم کرده و نقاط برخورد آنها را دقیقاً بدست آورید.

۴.۵ توابع خاص

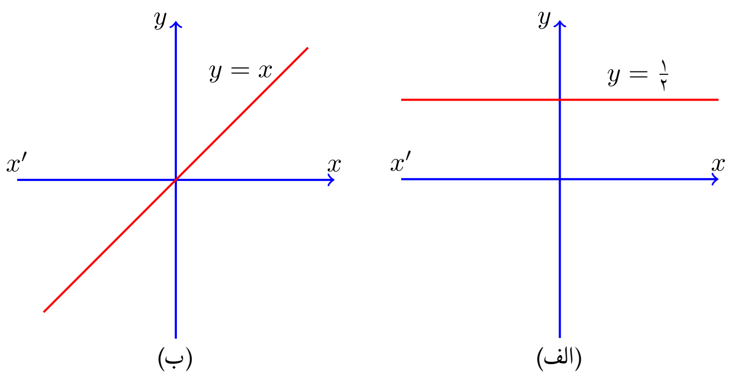
در این بخش چند تابع مهم و پراستفاده را معرفی و اجمالاً بررسی می کنیم. این توابع شامل توابع ثابت، همانی، چند جمله‌ای، جزء صحیح، علامت و توابع مهم لگاریتمی و نمائی می باشند.

۱.۴.۵ تابع همانی

تابع حقیقی با ضابطهٔ $f(x) = x$ را تابع همانی گوئیم که مقدار y آن همان مقدار x آنست. این تابع ناحیهٔ اول و سوم را نصف می کند و به آن نیمساز ناحیهٔ اول و سوم نیز گویند.

۲.۴.۵ تابع ثابت

تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ که $f(x) = a$ باشد (a عدد ثابت است)، را تابع ثابت گوئیم. این تابع یک خط راست موازی محور x—هاست، مثل تابع ثابت $y = \frac{۱}{۲}$. برد تابع ثابت مجموعهٔ تک عضوی $R_f = \{a\}$ می باشد.



شکل ۶.۵: شکل (الف) تابع ثابت $y = \frac{۱}{۲}$ و (ب) تابع همانی $y = x$.

۳.۴.۵ توابع درجهٔ اول

تابع درجهٔ اول همان تابع خطی $y = mx + h$، با شیب m و عرض از مبداء h است که در بخش ۳.۴ راجع به آن صحبت کردیم.

۴.۴.۵ توابع درجهٔ دوم

تابع سه جمله‌ای درجه دوم به صورت

$$y = ax^{۲} + bx + c$$

است که در آن $a \neq ۰$ و b و c اعدادی حقیقی هستند. نمودار این تابع شکل سهمی دارد و ضریب a لزوما ناصفر است. برای رسم سهمی لازم است محور تقارن سهمی $x = x_۰$ و رأس سهمی $(x_۰, y_۰)$ را بدست آوریم. محور تقارن سهمی عبارتست از خط $x_۰ = \frac{-b}{۲a}$ و برای یافتن رأس سهمی مقدار طول $x_۰$ را در معادلهٔ سهمی قرار داده که در نتیجه مقدار عرض $y_۰ = \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a}$ بدست می آید.

مثال ۱.۴.۴.۵. مطلوبست رسم سهمی $y = ۲x^{۲} + ۴x - ۶$ با یافتن محور تقارن و راس آن.

حل. برای محور تقارن و رأس این سهمی می نویسیم

$$x_۰ = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲ \times ۲} = -۱ \ , \ \ y_۰ = \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a} = \frac{-۴۸ - ۱۶}{۸} = -۸$$

لذا محور تقارن $x = -۱$ و رأس سهمی $(-۱, -۸)$ بوده و شکل سهمی طبق ۷.۵ است. ■

مطلب ۵.۳

اگر در معادلهٔ سهمی $a > ۰$ باشد، تقعر (گودی) سهمی رو به بالا و اگر $a < ۰$ باشد، تقعر سهمی رو به پائین است.

۵.۴.۵ تابع چندجمله‌ای درجهٔ n

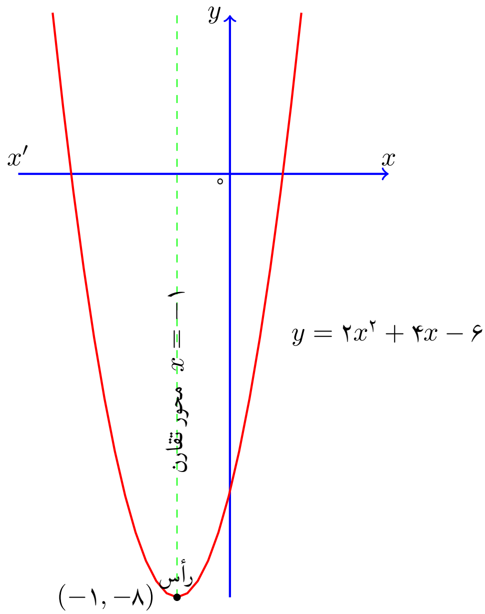
این تابع بصورت زیر تعریف می شود:

$$y = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + a_{n-۲} x^{n-۲} + \cdots + a_۱ x + a_۰$$

که در آن ضرایب $a_n, a_{n-۱}, \cdots, a_۱, a_۰$ اعداد حقیقی هستند. $a_n \neq ۰$ فرض شده و $a_۰$ را جملهٔ ثابت چندجمله‌ای نامند.

۶.۴.۵ تابع جزء صحیح (تابع پلکانی)

هر عدد حقیقی x را می توان بصورت مجموع یک عدد صحیح و یک عدد اعشاری نوشت، مثلا $۲٫۶۷ = ۲ + ۰٫۶۷$ که بصورت مجموع عدد صحیح ۲ و عدد اعشاری ۰٫۶۷ است. پس هر عدد حقیقی دارای یک جزء صحیح و یک جزء اعشاری است که این جزء اعشار مثبت یا صفر است. مقدار جزء صحیح عدد حقیقی x را با $[x]$ و جزء اعشاری آن را با $\{x\}$ مشخص می کنیم. برای مثال داریم:



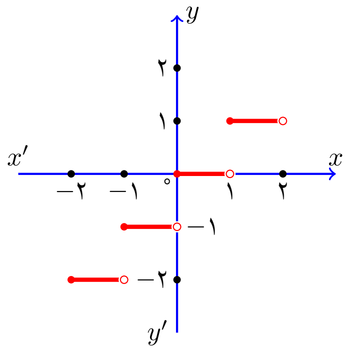
شکل ۷.۵: نمودار سهمی $y = ۲x^۲ + ۴x - ۶$.

x	جزء صحیح $[x]$	جزء اعشاری $\{x\}$
۵	۵	۵
۵/۲	۵	۰/۲
۵/۸	۵	۰/۸
−۵/۸	−۶	۰/۲
−۰/۴۳	−۱	۰/۵۷
−۳	−۳	۰

اکنون تابع $f(x) = [x]$ را روی تمام اعداد حقیقی تعریف نموده و آن را تابع جزء صحیح نامیم که نمودار آن در شکل ۸.۵ ترسیم شده است. توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = \mathbb{Z}$، علاوه بر این خطوط شکل در نقاط ابتدائی بازه‌ها بسته و در نقاط انتهائی بازند.

مثال ۲.۴.۵. تابع $g(x) = ۲[x] + ۱$ را در فاصلهٔ $[-۲, ۲)$ رسم کنید.

حل. ابتدا فاصلهٔ $[-۲, ۲)$ را به چهار زیر بازه تقسیم می‌کنیم و سپس روی هر زیر بازه، مقدار تابع را بدست آورده و

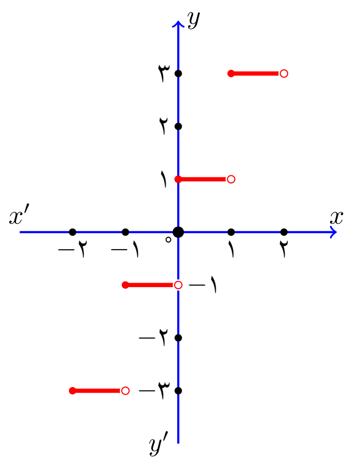


شکل ۸.۵: شکل تابع پلکانی $y = [x]$.

آنها را رسم خواهیم نمود. بدین صورت:

$$
\begin{aligned}
&[-۲, -۱) \Longrightarrow [x] = -۲ \Longrightarrow y = ۲(-۲) + ۱ = -۳\\
&[-۱, ۰) \Longrightarrow [x] = -۱ \Longrightarrow y = ۲(-۱) + ۱ = -۱\\
&[۰, ۱) \Longrightarrow [x] = ۰ \Longrightarrow y = ۲(۰) + ۱ = ۱\\
&[۱, ۲) \Longrightarrow [x] = ۱ \Longrightarrow y = ۲(۱) + ۱ = ۳
\end{aligned}
$$

شکل تابع مطابق ۹.۵ رسم می شود. ■



شکل ۹.۵: شکل تابع پلکانی $g(x) = ۲[x] + ۱$

۷.۴.۵ تابع پلکانی واحد

تابع پلکانی واحد بصورت زیر تعریف می شود.

$$u(x)=\begin{cases} 1 & ; \quad x\geqslant 0 \text{ اگر} \\ 0 & ; \quad x<0 \text{ اگر}\end{cases}$$

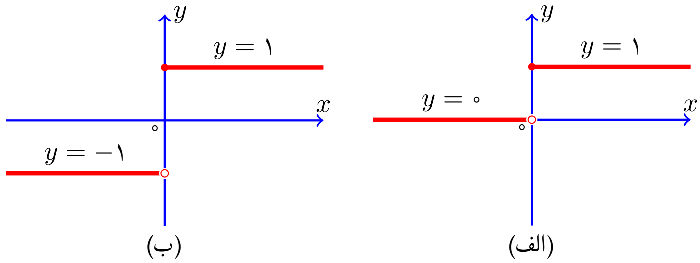
این تابع دارای استفاده های فراوانی در فیزیک و علوم مهندسی است. نمودار این تابع دو ضابطه‌ای در شکل ۱۰.۵ (الف) نشان داده شده است. دامنهٔ این تابع تمام اعداد حقیقی و برد آن $\{0,1\}$ می باشد.

۸.۴.۵ تابع علامت

تابع علامت، تابعی دو ضابطه ای بوده و بصورت زیر است:

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1 & ; \quad x\geqslant 0 \text{ اگر} \\ -1 & ; \quad x<0 \text{ اگر}\end{cases}$$

این تابع برای هر عدد حقیقی مانند x، علامت آن عدد را مشخص می نماید. مسلماً اگر عدد مثبت باشد علامت آن $+1$ و اگر عدد منفی باشد علامت آن -1 خواهد بود (صفر را عددی مثبت فرض کردیم). دامنهٔ تابع علامت، تمام اعداد حقیقی و برد آن $\{-1,1\}$ است، شکل ۱۰.۵ (ب).



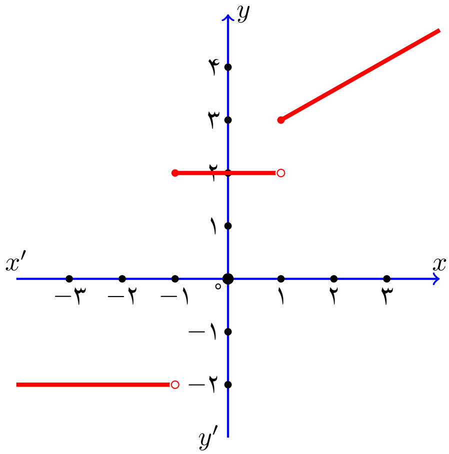
شکل ۱۰.۵: شکل (الف) تابع پلکانی واحد و (ب) تابع علامت

مثال ۳.۴.۵. تابع $f(x)=x\,u(x-1)+2\operatorname{sgn}(x+1)$ را ساده و سپس رسم کنید.

حل.

$$\begin{aligned} f(x) &= x\,u(x-1)+2\operatorname{sgn}(x+1) \\ &= x\begin{cases} 1 & ; \quad x-1\geqslant 0, \\ 0 & ; \quad x-1<0.\end{cases} +2\begin{cases} 1 & ; \quad x+1\geqslant 0, \\ -1 & ; \quad x+1<0.\end{cases} \\ &= \begin{cases} x & ; \quad x\geqslant 1, \\ 0 & ; \quad x<1.\end{cases} + \begin{cases} 2 & ; \quad x\geqslant -1, \\ -2 & ; \quad x<-1.\end{cases} \\ &= \begin{cases} -2 & ; \quad x<-1, \\ 2 & ; \quad -1\leqslant x<1, \\ x+2 & ; \quad x\geqslant 1.\end{cases} \end{aligned}$$

دقت کنید که عبارات اخیر را روی نواحی مشترک جمع نمودیم (شکل ۱۱.۵). ■



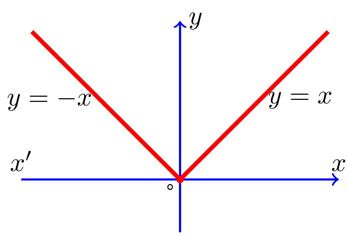
شکل ۱۱.۵: شکل تابع سه ضابطه‌ای مثال۳.۴.۵

۹.۴.۵ تابع قدرمطلق

قدرمطلق یا اندازهٔ مطلق یک عدد چنین بیان می شود که آن عدد را بدون در نظر گرفتن علامتش می نویسیم، بدین صورت که $۳ = |۳|$ و $|۵ = |-۵$ است. تابع قدرمطلق، تابعی دو ضابطه‌ای روی اعداد حقیقی است و بصورت زیر تعریف می شود:

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geqslant ۰, \\ -x & ; \quad x < ۰. \end{cases}$$

در واقع تعریف قدر مطلق چنین است که $|x| = \sqrt{x^۲}$. از این تعریف، مشخص می شود که قدرمطلق هر عدد حقیقی،



شکل ۱۲.۵: تابع قدرمطلق

عددی مثبت بوده و $|x|^۲ = x^۲ = |x^۲|$ و بعلاوه $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$. همچنین نتایجی دربارهٔ قدرمطلق حاصل می شود:

مطلب ۵.۴: خواص قدرمطلق

برای اعداد حقیقی a، b، c، k و x داریم:

$$
\begin{array}{lll}
(۱) & |-a| = |a| & \\
(۲) & |a-b| = |b-a| & \\
(۳) & |ab| = |a|.|b| & \\
(۴) & \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} & ,\quad b \neq ۰ \\
(۵) & |a+b| \leqslant |a|+|b| & ,\quad \text{نامساوی مثلثی} \\
(۶) & |a-b| \geqslant |a|-|b| & \\
(۷) & |a| = c \Longrightarrow a = \pm c & ,\quad c \geqslant ۰ \\
(۸) & |a| < c \Longrightarrow -c < a < c & ,\quad c \geqslant ۰ \\
(۹) & |a| > c \Longrightarrow a < -c \ \text{یا}\ a > c & ,\quad c \geqslant ۰ \\
(۱۰) & |x-k| < c \Longrightarrow k-c < x < k+c & ,\quad c \geqslant ۰ \\
(۱۱) & |x-k| > c \Longrightarrow x < k-c \ \text{یا}\ x > k+c & ,\quad c \geqslant ۰
\end{array}
$$

موارد (۸) تا (۱۱) در حالتی که علامت تساوی باشند نیز برقرارند.

از خواص فوق می توان جهت ساده کردن معادلات و نامعادلات بهره برد.

مثال ۴.۴.۵. مطلوبست حل نامعادلهٔ $|x-۲| \leqslant ۴$.

حل. طبق خاصیت (۸) بالا می نویسیم $-۴ \leqslant x-۲ \leqslant ۴$ که با جمع سه طرف با عدد ۲ داریم $-۲ \leqslant x \leqslant ۶$ پس $[-۲, ۶]$ مجموعه جواب نامعادله خواهد بود. ■

مثال ۵.۴.۵. مطلوبست حل نامعادلهٔ $|۳x-۵| = |x-۳|$.

حل. طبق خاصیت (۷)،

$$x-۳ = \pm(۳x-۵)$$

که نشان می دهد $x = ۱$ و $x = ۲$ جوابهای معادله‌اند. ■

مثال ۶.۴.۵. مطلوبست حل نامعادلهٔ $|x+۳| + |x-۲| = ۶$.

حل. طبق تعریف قدرمطلق چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned}
|x-۲|+|x+۳| &= \begin{cases} x-۲ & ; \quad x-۲\geqslant ۰, \\ -x+۲ & ; \quad x-۲< ۰. \end{cases} + \begin{cases} x+۳ & ; \quad x+۳\geqslant ۰, \\ -x-۳ & ; \quad x+۳< ۰. \end{cases} \\
&= \begin{cases} x-۲ & ; \quad x\geqslant ۲, \\ -x+۲ & ; \quad x< ۲. \end{cases} + \begin{cases} x+۳ & ; \quad x\geqslant -۳, \\ -x-۳ & ; \quad x< -۳. \end{cases} \\
&= \begin{cases} -۲x-۱ & ; \quad x< -۳, \\ ۵ & ; \quad -۳\leqslant x< ۲, \\ ۲x+۱ & ; \quad x\geqslant ۲. \end{cases} \\
&= ۶
\end{aligned}$$

مطابق محدوده ها، سه حالت فرض می کنیم:

$$\begin{aligned}
x<-۳ &\quad\Rightarrow\quad -۲x-۱=۶ \Rightarrow x=-\frac{۷}{۲}<-۳ \ \text{قابل قبول} \\
-۳\leqslant x<۲ &\quad\Rightarrow\quad ۵=۶ \ \text{غیر قابل قبول} \\
x\geqslant ۲ &\quad\Rightarrow\quad ۲x+۱=۶ \Rightarrow x=\frac{۵}{۲}\geqslant ۲ \ \text{قابل قبول}
\end{aligned}$$

در نتیجه ریشه ها $x=-\frac{۷}{۲}$ و $x=\frac{۵}{۲}$ هستند. ■

تمرین ۵.۵. .

۱. مقادیر عددی زیر را حساب کنید.

$$|-۴|\ ,\ \ |-۲/۵|\ ,\ \ |۵|\ ,\ \ |-۰/۱|\ ,\ \ |-(۱۰-۴)|-|-۳|\ ,\ \ |-|-۵|+۴||\ ,\ \ |۲^۲-۳^۳|\ ,$$

$$|-۴|\ ,\ \ |-۲/۵|\ ,\ \ |۵|\ ,\ \ |-۰/۱|\ ,\ \ |-(۱۰-۴)|-|-۳|\ ,\ \ |-|-۵|+۴||\ ,\ \ |۲^۲-۳^۳|\ ,$$

۲. توابع زیر را در بازهء $[-۲,۲]$ رسم کنید. دامنه و برد هر یک را مشخص نمائید.

$$\begin{array}{ll}
f(x)=\operatorname{sgn}(x)+u(x) & ,\quad g(x)=\operatorname{sgn}(x)+x\,u(x+۱) \\
h(x)=۲[x]-x+۱ & ,\quad i(x)=۲|x-۱|+۳\operatorname{sgn}(x-۱)-۳u(x) \\
j(x)=[x]-|x| & ,\quad k(x)=۴\operatorname{sgn}(x-۳)-۳u(x+۳)+۱
\end{array}$$

۳. برد تابع مثال ۳.۴.۵ چیست؟

۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{llll}
(a) & |x-۱|=-۱ & ,\ (b) & \left|\dfrac{x-۲}{x+۲}\right|=۱ \\
(c) & |۶x-۱۳|<۵ & ,\ (d) & |x-۶|=۳x+۸ \\
(e) & |۹-۳x|=۴|x-۵| & ,\ (f) & |۳x+۱|\geqslant |۲x-۲| \\
(g) & \left|\dfrac{x+۴}{۴x}\right|\geqslant ۱ & ,\ (h) & |x-۶|\leqslant |۳x+۸|+۲ \\
(i) & |۲x-۱|+|۲x+۱|=۴ & ,\ (j) & |x-۴|+|۳x+۱|\geqslant ۵
\end{array}$$

۱.۵.۵ توابع نمائی و هذلولوی

تابع نمائی یا تابع توانی برای $a > ۰$ حقیقی بصورت $f(x) = a^x$ که $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ تعریف شده و دارای خواص زیر است:

$$a^۰ = ۱ \ , \ a^۱ = a \ , \ a^{-n} = \frac{۱}{a^n} \ , \ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \ , \ a^m \cdot a^n = a^{m+n} \ , \ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

در حالت خاص وقتی که بجای عدد a از عدد نپر e استفاده کنیم، تابع نمائی $\exp(x) = e^x$ حاصل می شود که خواص و کاربردهای ویژه‌ای در ریاضیات دارد. توابع هذلولوی سینوس هیپربولیک $\sinh$ و کسینوس هیپربولیک $\cosh$ توابعی هستند که حاصل مجموع و تفاضل توابع نمائی اند و چنین تعریف می شوند:

$$\sinh x = \frac{۱}{۲}(e^x - e^{-x}) \ , \ \cosh x = \frac{۱}{۲}(e^x + e^{-x})$$

می توان بررسی نمود که $D_{\sinh} = D_{\cosh} = R_{\sinh} = \mathbb{R}$ و $R_{\cosh} = [۱, +\infty)$.

۲.۵.۵ تابع لگاریتم

تابع لگاریتم با ضابطهٔ $y = \log_b^x$ تعریف می شود و دارای خواص مطلب ۲,۲ است. در اینجا $b > ۰$ عددی حقیقی است و پایهٔ لگاریتم نامیده می شود، و در حالت کلی می بایست x و b مثبت بوده و $b \neq ۱$ باشد. برای این تابع $\log_b ۱ = ۰$ و $\log_b b = ۱$. وقتی پایه نوشته نمی شود یعنی برابر ۱۰ است. در حالت خاص اگر پایهٔ b برابر e باشد، بجای $y = \log_e^x$ می نویسیم $y = \ln x$ و آنرا لگاریتم نپری یا لگاریتم طبیعی گوئیم. علاوه بر اینکه خواص بالا را می توان برای لگاریتم نپری مجدداً بازگو نمود، باید ذکر نمائیم

$$e^{y \ln x} = x^y \ , \ e^{\ln x} = x \ , \ \ln e = ۱$$

که در موارد متعدد از آنها استفاده می شود. نمودار توابع نمائی و لگاریتمی بشکل ۱۳.۵ زیر است.

مثال ۱.۵.۵. دامنهٔ تابع $y = ۲\log_{۲x-۳}^{x^۲-۴}$ چیست؟

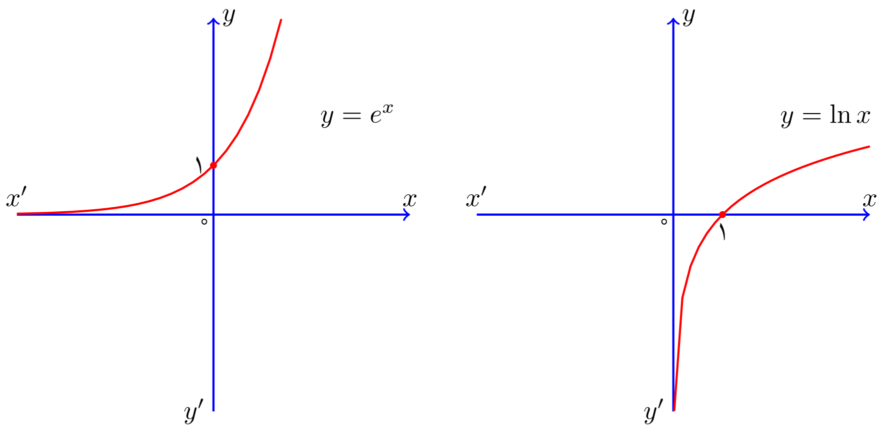
حل. طبق تعریف لگاریتم می بایست $۲x - ۳ > ۰$ و $x^۲ - ۴ > ۰$ و نیز $۲x - ۳ \neq ۱$ باشد. با تعیین علامت و اشتراک این سه شرط چنین نتیجه می شود که

$$D_y = (\frac{۳}{۲}, +\infty) \cap \Big[(-\infty, -۲) \cup (۲, +\infty)\Big] \cap \Big[\mathbb{R} - \{۲\}\Big] = (۲, +\infty)$$

■

تمرین ۶.۵. دامنه توابع زیر را تعیین نمائید.

$$(a) \quad y = \log_۳^{x-۴} \quad , \ (b) \quad y = \log_{x-۲}^{x^۲-۴} \quad , \ (c) \quad y = ۵ + \log_{x+۱}(x+۲)$$
$$(d) \quad y = \log_{x^۲-۹}^{x^۲-۱} \quad , \ (e) \quad y = ۳\log_{۲x}^{x-۱} + \log_{۲-x}^{x-۴} \quad , \ (f) \quad y = \log_x^{x+۱} \log_{۲-x}^{۲۵-x^۲}$$



شکل ۱۳.۵: نمودار توابع نمائی و لگاریتمی

۷.۵ کاربردهای لگاریتم

لگاریتم در بسیاری از علوم کاربرد دارد. یکی از دلایل استفاده از لگاریتم، مقایسهٔ دو کمیت فیزیکی با بعد یکسان است که در اینصورت خارج قسمت آنها عددی بدون واحد خواهد بود، لذا می توان از خارج قسمت آنها لگاریتم گرفت تا بتوان نسبت بسیار کوچک یا بسیار بزرگ آنها را با هم مقایسه کرد، بدون اینکه از ارقام و ضرایبشان استفاده شود. لگاریتم در علوم زیستی، نجوم، فیزیک، شیمی، آمار، علوم کامپیوتر، زمین شناسی و علوم زیستی کاربرد دارد و در ذیل مختصری از آنها را ذکر می کنیم.

(زیست) مجرای درک صوت در جانوران گوش است چنانکه کار شنوائی را در انسان بعهده داشته و درون آن پردهٔ صماخ در برابر اصوات لرزش نشان داده و این لرزش مطابق بسامد صدا تبدیل به نوسان شده و به مغز می رسد. اما مکانیسم تشخیص صوت در جانداران گوناگون بستگی به فرکانس و شدت صوت دارد. آستانهٔ شنوائی انسان در یک شدت صوت حدود $۱۰^{-۱۶}$ وات بر سانتیمتر مربع در ۱۰۰۰ هرتز روی داده و حد بالای بسامد صدا برای شنوائی نیز به شدت صوت بستگی دارد. گسترهٔ شنوائی یک انسان معمول، بین ۲۰ تا ۲۰۰۰۰ هرتز می باشد و در یک شدت مفروض، حد بالای بسامد معمولاً برای زنان بیشتر از مردان است.

برای مقایسهٔ بین شدت اصوات مختلف از دسی بل (db) استفاده می کنیم و در واقع دسی بل واحدی است برای اندازه گیری تغییرات حجم صدا. فرمول شدت صوت I چنین است:

$$I(\mathrm{db}) = ۱۰ \log_{۱۰} \frac{I}{I_۰}$$

که I شدت صوت بر حسب وات بر سانتیمتر مربع و $I_۰$ آستانهٔ شنوائی در ۱۰۰۰ هرتز ($۱۰^{-۱۶}$ وات بر سانتیمتر مربع) است.

مثال ۱.۷.۵. اگر شدت صوت مساوی آستانهٔ شنوائی باشد، شدت را برحسب دسی بل پیدا کنید. همچنین ترازهای دسی بل متناظر با شدتهای ۱۰۰ برابر و یک میلیون برابر شدت آستانه را محاسبه نمائید.

حل. برای آستانهٔ شنوائی $I = ۱۰ \log_{۱۰} \frac{I_۰}{I_۰} = ۰$ و برای صوتی ۱۰۰ برابر شدت آستانه

$$I = ۱۰ \log_{۱۰} \frac{۱۰۰ I_۰}{I_۰} = ۲۰ \text{ db}$$

است. شدت صوتی یک میلیون برابر شدت آستانه معادل

$$I = ۱۰ \log_{۱۰} \frac{۱۰۰۰۰۰۰ I_۰}{I_۰} = ۱۰ \log_{۱۰} ۱۰^۶ = ۶۰ \text{ db}$$

است. ■

هرچند اختلاف در شدت دو صوت تقریباً ۱ دسی بل است ولی در بسامدهای پائین انسان قادر است تا اختلاف ۱٫۵ دسی بل و در بسامدهای بالا تا اختلاف ۰٫۵ دسی بل را احساس نماید. جدول زیر حدود تقریبی ترازهای صوتی را نشان می دهد:

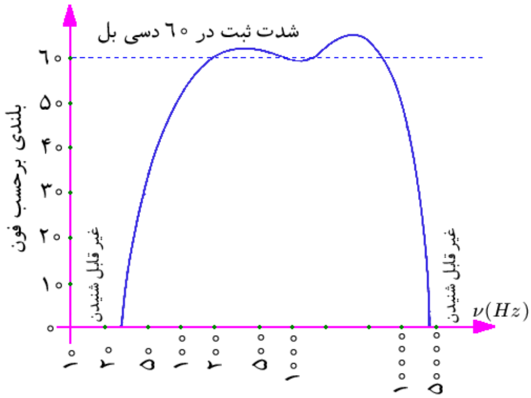
مضرب شدت آستانه	مصداق صوت	تراز دسی بل در $۱۰۰۰ Hz$
$۱۰^۱$	آستانهٔ شنوائی	۰
$۱۰^۲$	اتاق کاملا ساکت	۲۰
$۱۰^۴$	موسیقی خیلی ملایم، اتاق نشیمن	۴۰
$۱۰^۶$	گفتگو	۶۰
$۱۰^۸$	سخنرانی کلاس، رادیو با صدای بلند	۸۰
$۱۰^{۱۰}$	آسیب به شنوائی،	۱۰۰
	بلندترین قطعه ارکستر برای تماشاچی نزدیک	
$۱۰^{۱۲}$	آستانه درد	۱۲۰
$۱۰^{۱۴}$	درد شدید	۱۴۰
$۱۰^{۱۶}$	پاره شدن پرده صماخ	۱۶۰

بلندی صوت را می توان احساس فیزیولوژیکی شدت صوت نامید. در یک بسامد معین صوت شدیدتر، بلندتر احساس می شود. مهم نیست که یک صوت با بسامد ۴۰۰۰۰ هرتز چه شدتی دارد زیرا بعنوان صوتی بلند احساس نخواهد شد و گوش انسان به این بسامد حساس نیست اگرچه ممکن است سبب درد شود. از آنجاکه درک صوت در شدتهای مختلف و در بسامدهای گوناگون، بسیار متفاوت است معیار درک را در ۱۰۰۰ هرتز برابر یک فون می گیرند و این معیار برابر همان مقدار دسی بل در این بسامد است لذا بلندی برحسب فون برابر است با شدت برحسب دسی بل در بسامد ۱۰۰۰ هرتز. در شکل ۱۵.۱۹ نمودار بلندی صوت بر حسب فون بعنوان تابعی از بسامد ذکر شده و شدت ثبت در ۶۰ دسی بل است. نواحی غیرقابل شنیدن نیز در شدت ۶۰ دسی بل سنجیده شده است.

دسی بل های صفر تراز آستانهٔ شنوائی در ۱۰۰۰ هرتز است که بعنوان استاندارد $۱۰^{-۱۶}$ وات بر سانتیمتر مربع پذیرفته شده است. تراز درد $۱۰^{۱۲}$ تا $۱۰^{۱۳}$ برابر تراز آستانه است و بنابراین متناظر با ۱۲۰ تا ۱۳۰ دسی بل می باشد. شدت صوت ایمن برای ارتباط بین ۴۰ تا ۱۰۰ دسی بل (از $۱۰^۴ I_۰$ تا $۱۰^{۱۰} I_۰$) است.

(زمین شناسی) زلزله حاصل آزاد شدن انرژی ذخیره شده در لایه های زیرین زمین است. شدت وقوع زلزله در هر ناحیه بستگی به کانون زلزله ، سرچشمهٔ زلزله و دامنهٔ آن دارد. با محاسبات لگاریتمی می توان انرژی آزاد شده بوسیلهٔ زلزله، دامنه و نیز محل کانون زلزله را ارزیابی کرد.

از طریق بزرگا ی زلزله می توان بطور نسبی زمین لرزه ها را با یکدیگر مقایسه نمود. بزرگای زمین لرزه مفهومی کمی و عددی است و با انرژی رهاشده از چشمهٔ زمین لرزه متناسب است ولی به فاصلهٔ چشمهٔ لرزه تا نقطهٔ مشاهده شده بستگی



شکل ۱۴.۵: نمودار بلندی صدا برحسب فون بعنوان تابعی از بسامد برای یک منبع صوتی با شدت ثابت.

ندارد. مفهوم بزرگا، که آن را با M نشان خواهیم داد، اولین بار توسط لرزه‌شناس آمریکائی چارلز ریشتر[۱] در ۱۹۳۵م. معرفی شد و آن عبارت است از لگاریتم حداکثر دامنهٔ ارتعاش زمین برحسب میکرون یا میلیمتر که روی یک لرزه نگار در فاصلهٔ ۱۰۰ کیلومتری مرکز سطحی زمین لرزه ثبت شده باشد. طبق آن

$$M = \log_{۱۰} A_{\max} - \log_{۱۰} A_{۰} = \log_{۱۰}\left(\frac{A_{\max}}{A_{۰}}\right)$$

در این رابطه $A_{\max}$ حداکثر دامنهٔ موج ثبت شده روی لرزه نگار و $A_{۰}$ حداقل دامنهٔ موج ثبت شده توسط لرزه نگار در فاصلهٔ ۱۰۰ کیلومتری مرکز سطحی زمین است. طبق این رابطه، بزرگای زمین لرزه می تواند صفر یا حتی منفی نیز باشد. معمولاً زمین لرزه های بیش از ۲ ریشتر توسط انسان قابل احساس است و تاکنون هیچ زمین لرزه بیش از ۹ ریشتر در هیچ جای جهان ثبت نشده است.

مثال ۲.۷.۵. اگر حداکثر دامنهٔ ارتعاش زمین روی یک لرزه نگار معادل ۱۰ میلیمتر و دامنهٔ زمین لرزهٔ صفر $۱۰^{-۴}m$ باشد، بزرگای این زمین لرزه را تعیین کنید. اگر موج زمین لرزه‌ای روی دستگاه لرزه نگار، دامنهٔ ۵ میلیمتر را نشان دهد این لرزه معادل چند ریشتر بوده است؟ ($\log_{۱۰}^{۲} = ۰/۳۰۱$)

حل. بزرگای زمین لرزهٔ صفر معادل $M = \log_{۱۰}\left(\frac{۱۰^{-۳}}{۱۰^{-۴}}\right) = ۱$ ریشتر و لرزهٔ با دامنهٔ ۵ میلیمتر معادل با

$$M = \log_{۱۰}\left(\frac{۵ \times ۱۰^{-۳}}{۱۰^{-۴}}\right) = \log_{۱۰}^{۵۰} = ۲ - \log_{۱۰}^{۲} = ۱/۷$$

ریشتر خواهد بود. ■

(شیمی) در شیمی تجزیه بارها با لگاریتم مواجه می شویم از آن جمله می توان به استفاده از لگاریتم در اندازه گیری pH، توابع P و معادلهٔ دبای‌ـ هوکل که با استفاده از آن می توان ضرایب فعالیت یون ها را از طریق بار و میانگین اندازهٔ آنها محاسبه کرد، اشاره نمود.

غلظت $H^+(aq)$ در یک محلول را بر اساس مقیاس pH بیان کرده و چنین تعریف می شود:

$$pH = -\log_{۱۰}[H^+]$$

[۱] Richter

بطور پیشفرض مقدار pH آب برابر ۷ تعریف شده و خنثی است پس غلظت OH نیز برابر با $-\log_{۱۰}[OH^-]$ بوده و

$$p(H_۲O) = pH + pOH = ۱۴$$

در مفهوم آرنیوسی مقدار pH اسیدها بین ۱ تا ۷ و بازها از ۷ تا ۱۴ بیان می گردد.

مثال ۳.۷.۵. اگر غلظت $[H^+]$ محلولی برابر $۱۰^{-۵}$ باشد مقدار pH محلول، غلظت $[OH^-]$ و نیز pOH محلول را بیابید.

حل. چون

$$pH = -\log_{۱۰}[H^+] = -\log_{۱۰} ۱۰^{-۵} = ۵$$

و از آنجاکه $pH + pOH = ۱۴$ پس $pOH = ۹$ و غلظت $[OH^-]$ برابر $۱۰^{-۹}$ خواهد بود. ■

مثال ۴.۷.۵. برای محلول یکصدم مولی $NaOH$ که بازی قوی است $[OH^-] = ۱۰^{-۲}$ که داریم

$$pOH = -\log_{۱۰}[OH^-] = ۲$$

و چون مجموع pH و pOH یک محلول در $۲۵\,^{\circ}\mathrm{C}$ برابر ۱۴ است لذا $pH = ۱۲$.

(نجوم) در اخترشناسی جهت اندازه گیری فاصلهٔ ستارگان از زمین و تناسب این فاصله با مقدار روشنائی آنها از لگاریتم بهره گرفته می شود. از آنجائی که چشم انسان قادر است ستارگان مرئی، با قدر حداکثر شش را ببیند و مسلماً این قدر ظاهری با قدر مطلق روشنائی ستاره بسیار متفاوت است و هرچه ستاره دورتر باشد کم سوتر بنظر خواهد رسید. برای ستاره‌ای با قدر ظاهری m و قدر مطلق M رابطهٔ زیر حکمفرماست:

$$M - m = ۵\log_{۱۰}\frac{۱۰\ \mathrm{Pc}}{d\ \mathrm{Pc}}$$

که d فاصلهٔ ظاهری ستاره از ما برحسب پارسک است. هم چنین برای دو ستاره که یکی با شدت $I_۱$ از قدر $m_۱$ و دیگری با شدت $I_۲$ از قدر $m_۲$ است می توان جهت مقایسهء قدر ظاهریشان رابطهٔ زیر را بکار برد:

$$m_۲ - m_۱ = ۲/۵\log_{۱۰}\frac{I_۱}{I_۲} \qquad (۱.۵)$$

مثال ۵.۷.۵. ضعیفترین ستارگانی را که می توان با تلسکوپ ۲۰۰ اینچی رصدخانه مونت پالومار کالیفرنیا عکس گرفت دارای قدری حدود ۲۳٫۵ اند. این تلسکوپ چند برابر از چشم غیرمسلح حساستر است.

حل. برای چشم معمولی $m = ۶$ بوده و

$$۲۳/۵ - ۶ = ۲/۵\log_{۱۰}\frac{I_۱}{I_۲} \Rightarrow \frac{I_۱}{I_۲} = ۱۰^{۷}$$

یعنی این تلسکوپ ۱۰ میلیون بار از چشم معمولی حساستر است. ■

مثال ۶.۷.۵. شعرای یمانی نورانی ترین ستاره آسمان با قدر ۱/۴− و سهیل اولین ستارهٔ روشن پس از آن از قدر ۰/۷− است. شدت درخشندگی شعرای یمانی چند برابر ستارهٔ سهیل است؟
حل. مطابق فرمول ۱.۵ داریم:

$$-۱/۴-(-۰/۷)=۲/۵\log_{۱۰}\frac{I_۱}{I_۲}\Rightarrow\frac{I_۱}{I_۲}=۰/۵۳\Rightarrow I_۱=۰/۵۳I_۲$$

که نشان می دهد شدت درخشندگی شعرای یمانی تقریبا نصف شدت درخشندگی سهیل است. ■

مثال ۷.۷.۵. نشان دهید که کاهش یک واحد از قدر یک ستاره نظیر به ۲/۵ بار افزایش در شدت نور آنست.
حل.

$$m-۱-m=۲/۵\log_{۱۰}\frac{I_۱}{I_۲}\Rightarrow\frac{I_۱}{I_۲}=۱۰^{-\frac{۲}{۵}}=\frac{۱}{\sqrt[۵]{۱۰۰}}=\frac{۱}{۲/۵۸۱}$$

و در نتیجه با تقریبی بسیار عالی $I_۲=۲/۵I_۱$ خواهد بود. ■

۸.۵ مقیاس لگاریتمی

مانند تابع پرکاربرد لگاریتم، بسیاری از نمونه های طبیعی و جامعه شناسی از تابع نمائی پیروی می کنند که یکی از مهمترین آنها، مباحث رشد جمعیت است چه جمعیت های انسانی و یا جوامع غیر آن نظیر جمعیت باکتری ها. توابع لگاریتمی و نمائی در مطالعهٔ بسیاری از مسائل فیزیکی نیز وارد می شوند. در زمین شناسی بطور گسترده‌ای ارقام بدست آمده از نمونه های زمین شناختی و فسیلی تابع نمائی محسوب شده و از آن بهره می گیرند. چنین ساختارهائی را که نمونه هائی از آنها را در بخش های ۱.۱۰.۱۱ و ۳.۱۱.۱۱ ذکر خواهیم کرد از الگوهای $N(t)=N_۰e^{rt}$ که مبین رشد بوده و $N(t)=N_۰e^{-rt}$ که نشاندهندهٔ زوال برحسب گذشت زمان t است، پیروی می کنند.
در بخش ۵.۴ نشان دادیم که چگونه می توان الگوهائی را روی دو متغیر که با هم رابطه ای خطی داشتند، اجرا نمود با این حال در بسیاری از موارد عملی و آزمایشگاهی دیده می شود که دو متغیر x و y با هم رابطهٔ خطی مشخصی ندارند. در برخی موارد اعداد حاصل از آزمایش نشان می دهند که یکی و یا هر دو متغیر x و y با مقیاسی لگاریتمی، با دیگری رابطه ای خطی داشته و می توان بین آندو فرمول لگاریتمی معینی ایجاد نمود. به نمودار حاصل از مقادیر یک متغیر و لگاریتم متغیر دیگر نمودار نیمه لگاریتمی گوئیم.
تابع نمائی $y=aq^x$ را در نظر گرفته و با شرط $a>۰$ و $q>۰$ از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$\log y=\log a+x\log q$$

در اینجا پایهٔ لگاریتم هر عدد دلخواه مثبتی (بجز ۱) می تواند باشد اما در اینجا برای سهولت محاسبات از پایه ۱۰ استفاده می کنیم. با فرض $Y=\log y$ نمودار نیمه لگاریتمی $Y=mx+h$ نموداری خطی خواهد بود که $m=\log q$ شیب خط و $h=\log a$ عرض از مبداء آنست. در عمل وقتی مقادیر y صفر یا منفی است با فرضی مانند $Y=\log(y+k)$ نمودار نیمه لگاریتمی را برازش خواهیم داد (k عددی مثبت است).

مثال ۱.۸.۵. مقادیر حاصل از یک آزمایش تجربی در جدول زیر نوشته شده است. با ترسیمی نیمه لگاریتمی نشان دهید رابطهٔ نمائی بین این دو مقدار وجود داشته و این رابطه را بیابید.

x محلول $(m\,\mathrm{gr})$	۱/۵	۲/۵	۳/۵	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۵
y دقیقه (min)	۰	۰/۴۷	۲/۸	۲۰/۴	۵۳/۲	۱۴۰	۲۹۳

حل. وجود رشد زیاد مقادیر در سطر دوم نشان می دهد که رابطهٔ دو متغیر خطی نیست. با فرض $Y = \log(y+۱)$ جدول داده ها را بصورت زیر تغییر می دهیم:

x	۱/۵	۲/۵	۳/۵	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۵
Y	۰	۰/۱۶۷۳	۰/۵۷۹۸	۱/۳۳۰۴	۱/۷۳۴۰	۲/۱۴۹۲	۲/۴۶۸۴

نقاط حاصل را طبق الگوی بخش ۵.۴ برازش داده و خط برازش بصورت

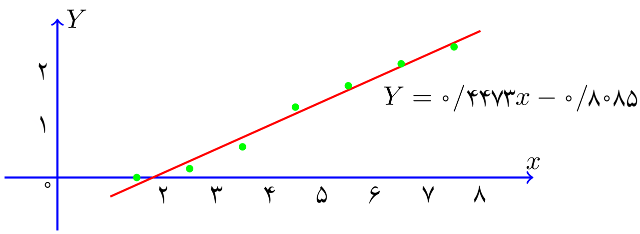
$$Y = ۰/۴۴۷۳x - ۰/۸۰۸۵$$

بدست می آید. نمودار نیمه لگاریتمی و خط برازش بشکل ۱۵.۵ است. همچنین

$$\log(y+۱) = ۰/۴۴۷۳x - ۰/۸۰۸۵$$

و بنابراین $y = ۰/۱۵۵۴ \times ۲/۸^x - ۱$ می تواند یک الگوی نمائی برای نمایش داده های این آزمایش باشد. ■

گاهی نتایج حاصل از آزمایش نشان می دهد که هر دو متغیر x و y با مقیاسی لگاریتمی، رابطه‌ای خطی دارند. به نمودار



شکل ۱۵.۵: نمودار نیمه لگاریتمی نتایج آزمایش مثال ۱.۸.۵ و خط برازش حاصل از آن

حاصل نمودار لگاریتم مضاعف یا نمودار $\log - \log$ گوئیم. تابع $y = ax^m$ را در نظر گرفته و با شرط $a > ۰$ از طرفین آن لگاریتم می گیریم:

$$\log y = \log a + m \log x$$

در اینجا نیز پایهٔ لگاریتم را ترجیحاً ۱۰ در نظر گرفته و با فرض متغیرهای $X = \log x$ و $Y = \log y$، تابع خطی $Y = mX + h$ را با شیب m و عرض از مبداء $h = \log a$ در صفحه رسم نموده که نموداری $\log - \log$ است. برای مقادیر x یا y صفر یا منفی (حداکثر k) با فرضهائی معنی دار مانند $X = \log(x+k)$ و یا $Y = \log(y+k)$، نمودار $\log - \log$ را ایجاد نموده و داده ها را برازش خواهیم داد.

مثال ۲.۸.۵. (زیست) انرژی مصرف شده برای دویدن در مورد چندگونه جاندار اندازه گیری شده است. فرض کنید E انرژی مصرفی برای حمل یک گرم از وزن بدن در ۱ کیلومتر (بر حسب $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{gr\,km}}$) و M_{gr} وزن بدن جانور باشد. داده های تجربی زیر بدست آمده است. نمودار $\log - \log$ را ترسیم نموده و خط راستی را با آن برازش دهید.

جانور	$M(\mathrm{gr})$	$E\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{gr\,km}}\right)$
موش سفید	۲۱	۵۴
سنجاب زمینی	۲۳۶	۱۵
موش صحرائی سفید	۳۸۴	۱۸
سگ (کوچک)	$۲/۶ \times ۱۰^{۳}$	۷/۱
سگ (بزرگ)	$۱/۸ \times ۱۰^{۴}$	۳/۹
گوسفند	$۳/۹ \times ۱۰^{۴}$	۲/۴
اسب	$۵/۸ \times ۱۰^{۵}$	۰/۶۳

حل. از ستون های E و M لگاریتم گرفته و در جدول زیر مقادیر $X = \log_{۱۰}^{M}$ و $Y = \log_{۱۰}^{E}$ را نوشته‌ایم:

X	۱/۳۲۲	۲/۳۷۳	۲/۵۸۴	۳/۴۱۵	۴/۲۵۵	۴/۵۹۱	۵/۷۶۳
Y	۱/۷۳۲	۱/۱۷۶	۱/۲۵۵	۰/۸۵۱	۰/۵۹۱	۰/۳۸۰	−۰/۲۰۱

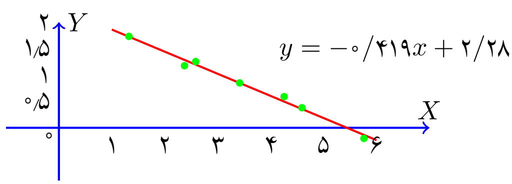
نقاط جدول را برازش داده و خط برازش بمعادلهٔ $Y = -۰/۴۱۹X + ۲/۲۸$ است. نمودار $\log - \log$ و خط برازش بشکل ۱۶.۵ رسم شده است. همچنین

$$\log_{۱۰}^{E} = -۰/۴۱۹ \log_{۱۰}^{M} + ۲/۲۸$$

پس

$$۱۰^{\log_{۱۰}^{E}} = ۱۰^{-۰/۴۱۹ \log_{۱۰}^{M}} \times ۱۰^{۲/۲۸}$$

و در نتیجه $E = \frac{۱۹۰/۵۵}{M^{۰/۴۱۹}}$ می تواند یک الگوی نمائی مناسب جهت ارتباط داده های این آزمایش باشد. ■



شکل ۱۶.۵: نمودار لگاریتم مضاعف از نتایج آزمایش مثال ۲.۸.۵ و خط برازش آن

تمرین ۹.۵. تمرینات تکمیلی.

۱. توابع زیر بصورت زوج مرتب داده شده اند. برای هر کدام ضابطه ای مناسب بیان کنید؟

$$f = \{(۱, ۰/۵), (۲, ۱), (۳, ۱/۵), (۴, ۲), (۵, ۲/۵), \cdots\}$$
$$g = \{(۱, ۲), (۲, ۸), (۳, ۱۸), (۴, ۳۲), (۵, ۵۰), \cdots\}$$
$$h = \{(۱, ۰), (۲, -۱), (۳, -۲), (۴, -۳), (۵, -۴), \cdots\}$$

۲. دامنهٔ توابع زیر را بدست آورید.

$$\begin{array}{lll}
f=\{(۰,۰),(۱,۰),(۲,۰),(۳,۰),(۴,۰),\cdots\} & & \\
g(x)=۳+\dfrac{۱}{x^{۲}} & , & h(x)=\sqrt{\dfrac{۴}{۳-x}} \\
i(x)=\dfrac{\sqrt{x+۱}}{x} & , & j(x)=۲\log_{x-۲}^{x^{۲}-۱} \\
k(x)=\sqrt{(x-۱)^{۲}}+\sqrt{-x} & , & \ell(x)=\dfrac{\sqrt{x^{۲}-۹}}{\sqrt{x-۳}} \\
m(x)=\sqrt{x}.\sqrt{x^{۲}+۴x+۴} & , & n(x)=\sqrt{x}+\log_{x+۱}^{۹-x^{۲}} \\
o(x)=\ln\dfrac{x-۱}{۴x+۴} & , & p(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}-۱} \\
q(x)=\log_{\sqrt{۵-x}}^{\frac{۲x}{x+۳}} & , & r(x)=\ln(۳۶-x^{۲})
\end{array}$$

۳. توابع زیر را با نقطه یابی یا روشهای دیگر رسم کنید.

$$\begin{array}{llll}
(a) & y=۲-x^{۲} & ,\ (b) & y=۲x^{۲}+۳x-۷ \\
(c) & y=x^{۲}+۴x-۱ & ,\ (d) & y=x^{۲}+x-۱ \\
(e) & y=\operatorname{sgn}(x+۱)+۲u(x) & ,\ (f) & y=\operatorname{sgn}(x)-u(x-۲) \\
(g) & y=[x]+x^{۲}+۱ & ,\ (h) & y=۲\operatorname{sgn}(x-۱)-۳u(x)+۱ \\
(i) & y=\ln|x| & ,\ (j) & y=۲|x|+x\operatorname{sgn}(x)+u(x+۱) \\
(k) & y=x-[x] & ,\ (\ell) & y=۳\left[\dfrac{x}{۲}\right]-۴
\end{array}$$

$$(m)\quad y=\begin{cases} x^{۲} & ,x\leqslant ۰, \\ x+۱ & ,x>۰. \end{cases}+\begin{cases} x-۱ & ,x\leqslant ۲, \\ ۲-x^{۲} & ,x>۲. \end{cases}$$

$$(n)\quad y=\begin{cases} \sqrt{-x} & ,x<-۱, \\ \dfrac{۱}{x} & ,-۱\leqslant x<۰, \\ x^{۲} & ,x\geqslant ۰. \end{cases}\times\begin{cases} x & ,x\leqslant ۱, \\ \dfrac{۱}{\sqrt{x}} & ,x>۱. \end{cases}$$

۴. برد توابع زیر را مشخص نمائید.

$$\begin{array}{lllll}
f(x)=\dfrac{۴x}{x+۱} & , & g(x)=۳x^{۲}+x-۲۰ & , & h(x)=۶x^{۴}+x^{۲} \\
i(x)=\dfrac{۲\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x}-۲} & , & j(x)=۴\sqrt{x}+۴x+۳ & , & k(x)=\dfrac{x^{۲}}{x^{۲}+۵}
\end{array}$$

۵. آیا توابع $f(x)=x$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x}$ مساویند؟

۶. نقطهٔ تلاقی منحنی های $y=e^{x}-۱$ و $y=۱-e^{-x}$ را بیابید.

۷. محل برخورد دو منحنی $y=\dfrac{\ln x}{۴x}$ و $y=x\ln x$ را پیدا کنید.

۸. کدام بزرگترند $\log_a^{۲}$ یا $\log_a^{۳}$ ؟

۹. ثابت کنید $\log_b^a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

۱۰. اگر بدانیم $\log_{۱۰}^{۲} = ۰/۳$ و $\log_{۱۰}^{۵} = ۰/۷$ مقدار عبارات زیر را بدست آورید

$$a = \log_{۱۰}^{۲۰} \ , \ b = \log_{۱۰}^{۸۰} \ , \ c = \log_{۱۰}^{۱۰۲۴} \ , \ d = \log_{۱۰}^{۱۲۵۰} \ , \ e = \log_{۱۰}^{۵۰۰۰}$$

۱۱. اگر بدانیم $\log_{۱۰}^{۲} = a$ و $\log_{۱۰}^{۷} = b$ مطلوبست مقدار $\log_{۸}^{۹/۸}$؟

۱۲. برای x−های مثبت ثابت کنید $e^{\ln x} = x$.

۱۳. برای همهٔ x های حقیقی ثابت کنید $\ln e^x = x$.

۱۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{llll}
(a) & |x+۲| = ۵ & ,\ (b) & |x-۴| \geqslant ۲ \\
(c) & |۲x-۱| > ۱-x & ,\ (d) & |x-۲| \leqslant ۴x \\
(e) & |x+۲| \leqslant |x-۳| & ,\ (f) & |x-۲| = ۳x+۵ \\
(g) & \left|\dfrac{x+۲}{x}\right| \geqslant x & ,\ (h) & \left|\dfrac{x+۲}{۳x}\right| < ۵ \\
(i) & x^۲ < |۲x-۸| & ,\ (j) & \Big||x+۱|-۱\Big| > ۳ \\
(k) & |x-۱|+|x+۱| = ۲ & ,\ (\ell) & |۲x+۳|-|x-۴| = ۱ \\
(m) & |x-۱|+|۲x+۱| \geqslant ۲ & ,\ (n) & |x-۱|+|x+۱|+|۲x| = ۱ \\
(o) & ۲۷^x + ۱۲^x = ۲\times ۸^x & ,\ (p) & \dfrac{۱}{\sqrt[x]{۴}} + \dfrac{۱}{\sqrt[x]{۶}} = \dfrac{۱}{\sqrt[x]{۹}} \\
(q) & ۲\log_۴^x + \log_۴^{x^۲-۳} = ۱ & ,\ (r) & \log_۲^{x+۱} - \log_۴^{۲x+۱۱} = ۲ \\
(s) & ۲^{x-۱} + ۲^{x+۱} = ۲۰ & ,\ (t) & \log_۲(x+۵) + \log_۲(x+۳) = ۳ \\
(u) & \log_۳\log_۴\log_۵ x = ۲ & ,\ (v) & \log_x \dfrac{x^۲+۸}{x+۱} = ۲ \\
(w) & x^۲ + |x| = ۱۲ & ,\ (x) & \Big||x+۵|-۴\Big| = ۲ \\
(y) & [x-۱] = ۶ & ,\ (z) & ۴[x]+۳ < ۵[x]-۲ \\
(\alpha) & ۴e^{۲x-۱} = ۲۰ & ,\ (\beta) & e^{x\ln ۵} = ۱۲۵ \\
(\gamma) & ۴^{x\ln ۲} = e^{e^{\ln ۱}} & ,\ (\delta) & e^{۴\ln ۱} = ۲۰x + \ln|۱-\ln ۱|
\end{array}$$

۱۵. اگر $f(x) = \dfrac{x}{x+۱}$ مقادیر $f(۱)$، $f(f(۱))$ و $f(f(f(۱)))$ چیست.

۱۶. جواب دستگاه‌های زیر را بیابید.

$$(a)\ \begin{cases} \ln x - \ln y = ۱ \\ ۲x - y + ۱ = ۲e. \end{cases} \quad , \quad (b)\ \begin{cases} \ln x - \ln y = ۲ \\ ۴x - y = ۲e - ۱. \end{cases}$$

۱۷. ثابت کنید $x\,\mathrm{sgn}(x) = |x|$.

۱۸. (فیزیک) جسمی از ارتفاع h سقوط می کند و پس از t ثانیه به سطح زمین می رسد. تابع ارتفاع بر حسب متر بصورت $y = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} + h$ بیان می شود. هرچند g با موقعیت جغرافیائی تغییر می کند، ولی در محاسبات معمول آن را برابر $۹/۸\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{۲}}$ در نظر می گیریم. لذا می توان گفت که تابع ارتفاع جسم در حال سقوط تابعی از زمان بوده و با ضابطهٔ $y(t) = -۴/۹t^{۲} + h$ دارای شکلی سهمی است. شکل آنرا در دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۹. (فیزیک) جذب نور توسط آب دریا از قانون $I(x) = I_{\circ}e^{-kx}$ تبعیت می کند که $I_{\circ}$ شدت نور در سطح دریا، $I(x)$ شدت در عمق x متری و k ضریب جذب است. k را چنان بیابید که شدت نور در عمق ۵ متری، یکهزارم شدت نور در سطح دریا باشد.

۲۰. (زمین شناسی) برای محاسبهٔ عمق کانون زلزله چند رابطهٔ تجربی وجود دارد که یکی از آنها چنین است:

$$M = ۱/۵ + ۳\log_{۱۰}\left(\frac{r^{۲}}{H^{۲}} + ۱\right)$$

که M بزرگای زلزله، r شعاع منطقه تحت تاثیر و H عمق کانون لرزه و همبعد با r است. اگر شهر A را لرزه‌ای با شدت ۴٫۵ ریشتر بلرزاند و دامنهٔ لرزه شهر B را در فاصلهٔ ۵۰ کیلومتری تحت تاثیر قرار دهد، سرچشمهٔ این لرزه چند کیلومتر زیر سطح زمین واقع شده است؟

۲۱. (شیمی) (الف) مقدار pH یک محلول $۰/۰۵M$ از H^{+} را بیابید. (ب) مقدار pOH یک محلول که $[OH^{-}]$ آن $۰/۰۳M$ باشد را بدست آورید. (ج) pH محلول $۰/۱۲M$ از $HOCN$ چقدر است؟ ($\log_{۱۰} ۲ = ۰/۳۰۱$ و $\log_{۱۰} ۳ = ۰/۴۷۷$)

۲۲. (شیمی) نشان دهید غلظت H^{+} در یک محلول $۰/۱M$ اسیداستیک که نسبت به سدیم استات $NaC_{۲}H_{۳}O_{۲}$ است برابرست با $۱/۲ \times ۱۰^{-۵}M$.

۲۳. (شیمی) pH یک محلول $۰/۲۶M$ اسید ضعیف HX برابر ۲/۸۶ است. ثابت یونش HX چقدر است؟

۲۴. (شیمی) طبق معادلهٔ کلازیوس - کلاپیرون در یک فاصلهٔ دمائی نسبتاً کوچک، آنتالپی تبخیر یک مایع $\Delta H_v\ \frac{k\,\mathrm{J}}{\mathrm{mol}}$ را تقریباً می توان ثابت فرض نمود و در این حالت بین فشار $P(\,\mathrm{atm})$ و دما $T(\,\mathrm{K})$ رابطهٔ زیر را داریم:

$$\log_{۱۰} P = -\frac{\Delta H_v}{۲/۳۰۳RT} + C$$

که $R = ۸/۳۱۴\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\,mol}}$ و C ثابت ویژهٔ مایع است. در آزمایشی می خواهیم آنتالپی تبخیر $CS_{۲}$ را در فاصلهٔ دمائی $۰\ {}^{\circ}\mathrm{C}$ تا $۳۰\ {}^{\circ}\mathrm{C}$ بیابیم. بدین منظور در دماهای متفاوتی، فشار بخار این گاز را اندازه گیری نموده و در جدول زیر آورده ایم:

$T(\,^{\circ}\mathrm{C})$	۲	۵	۱۰	۱۵	۱۸	۲۲	۲۵
$P(\,\mathrm{atm})$	۰/۱۹	۰/۲۱	۰/۲۶	۰/۳۲	۰/۳۵	۰/۴۲	۰/۴۸

با رسم نمودار نیمه لگاریتمی P بر حسب $t = \frac{۱}{T}$ از فرمول

$$\log_{۱۰} P = -\frac{\Delta H_v}{۲/۳۰۳R} t + C$$

مقادیر ΔH_v و C را برآورد نمائید.

۲۵. (زیست) فعالیت آنزیمی کاتالاز هنگامی که در معرض نور خورشید قرار می گیرد با حضور اکسیژن از بین می رود. طی آزمایشی، غلظت کاتالاز y بر حسب زمان t (دقیقه) بشکل جدول زیر حاصل شده است:

زمان $t_{(\text{min})}$	۰	۱۰	۳۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰
کاتالاز $y(\frac{\mu\,\text{gr}}{۱۰m\,\text{lit}})$	۱۲۱	۷۴	۳۰	۱۲	۶/۷	۳/۷	۲/۰

با رسم نیمه لگاریتمی، رابطهٔ y را بر حسب t بیابید (از t لگاریتم بگیرید).

۲۶. (فیزیک) با حرکت یک اجسام در هوا، وجود هوا در برابر حرکت اجسام نیروی مقاوم محسوب شده و از حرکت آنها جلوگیری می کند. عوامل موثر در مقاومت هوا عبارتند از سطح برخورد جسم با هوا، شکل جسم، سرعت جسم و چگالی هوا. اجسامی که نیروی مقاوم هوا در برابر آنها کم است را اجسام آئرودینامیک نامند. بطور معمول می توان برای جسمی با سرعت $v(\frac{\text{m}}{\text{s}})$ نیروی مقاوم هوا $f_s(\text{N})$ را چنین بیان کرد:

$$\begin{aligned} ۵\frac{\text{cm}}{\text{s}} < v < ۵۰\frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad &\Rightarrow \quad f_s \propto v \\ ۵۰\frac{\text{m}}{\text{s}} < v < ۵۰\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad &\Rightarrow \quad f_s \propto v^۲ \\ ۵۰\frac{\text{m}}{\text{s}} < v < ۵۰۰\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad &\Rightarrow \quad f_s \propto v^۳ \end{aligned}$$

فرمول معمول برای محاسبهٔ این نیروی مقاوم $f_s = kSv^m$ است که k ضریبی متناسب با شکل جسم و چگالی هوا و S نیز بزرگترین سطح مقطع جسم است. توان m برای سرعت می تواند هر عدد حقیقی بیشتر از یک باشد. ضریب k برای صفحه ۰/۸۵، برای کره ۰/۰۳ و برای اجسام آئرودینامیک ۰/۰۰۳ است. در آزمایشی از جسمی آئرودینامیک ، در سرعتهای مختلف مقدار نیروی f_s طبق زیر بدست آمده است:

$v(\frac{\text{m}}{\text{s}})$	۵۰	۷۵	۱۰۰	۱۲۵	۱۵۰	۱۷۵	۲۰۰
$f_s(\text{N})$	۲/۳	۵/۱	۱۰/۱	۱۵/۷	۲۲/۶	۳۰/۳	۴۵/۰

نمودار $\log-\log$ از f_s بر حسب v را ترسیم نموده و خط راستی با آن برازش دهید. مقدار توان m و ضریب kS جسم را برآورد کنید. اگر مقدار بزرگترین سطح مقطع جسم ۵۰۰ سانتیمتر مربع باشد شکل این جسم چقدر به شکل آئرودینامیک نزدیک است.

۲۷. (زیست) آمین بیوژنیک « سروتونین » با پایداری هیجانات در انسان مرتبط است. برای اندازه‌گیری سروتونین بمقدار کم روشی مبتنی بر بازدارندگی برخی فعالیت های شیمیائی بوجود آمد. داده های زیر در رابطهٔ سروتونین (بر حسب نانوگرم) و میزان بازدارندگی است:

x سروتونین $(n\,\mathrm{gr})$	۱/۲	۳/۶	۱۲	۳۳
y بازدارندگی (٪)	۱۹	۳۶	۶۰	۸۴

با رسم نیمه لگاریتمی (از سروتونین لگاریتم بگیرید) رابطه ای نمائی برای این هماهنگی یافته و مقدار سروتونین را که باعث ۵۰٪ بازدارندگی است را برآورد نمائید.

۲۸. (زیست) داده سنجی نشان داده که اگر x و y اندازهٔ دو عضو از یک حیوان باشند سپس مقادیر x و y توسط معادلهٔ آلومتریک بصورت

$$\ln y - k\ln x = \ln C$$

مرتبطند. k و C ثابتند و بسته به حیوانات گونه های مشابه، یکسانند. یک تئوری بیان می کند که وزن مار W بایستی متناسب با مکعب طول آن L باشد. برای بررسی این نظریه، در چند نمونه از یک نوع مار [۲]، وزن و طول آنها طبق زیر بدست آمده است:

$L(\mathrm{cm})$	۳۷	۴۲	۴۶	۵۱	۵۶	۶۰	۶۱	۶۴
$W(\mathrm{gr})$	۲۴	۳۴	۴۵	۶۱	۸۰	۹۷	۱۰۲	۱۱۷

نمودار $\log-\log$ از وزن مار بر حسب طول آن ترسیم نموده و خط راستی با آن برازش دهید. معادلهٔ آلومتریک متناسب آنرا نتیجه بگیرید.

[۲] Heterodon Nasicus